12.11.2018

Άσκηση Να βρείτε όλες τις λύσεις της διοφαντικής εξίσωσης $15x+213y=51$

Δ.Ε $ax+by=\gamma$
Λύση $(x_0,y_0)\in\mathbb{Z}^2$ τ.ω
$ax_0+by_0=\gamma$
έχει λύση $\Leftrightarrow d=(a,b)/\gamma$
Αν (x_0,y_0) λύση τότε οι λύσεις είναι $x=x_0+\frac{b}{d}t$, $t\in\mathbb{Z}$
$y=y_0-\frac{a}{d}t$

$d=\mu\kappa\delta(a,b)=\mu\kappa\delta(15,213)$

$213=14\cdot15+3 \to \mu\kappa\delta(15,213)=3$
$15=5\cdot3+0$

$3/51=3\cdot17$ Άρα η διοφ. εξίσωση έχει λύση
$15(-14)+213(1)=3$
$15\,\boxed{(-14)17}+213\,\boxed{1\cdot17}=51$

$x_0=(-14)\cdot17=-238$, $y_0=17$

$$\begin{cases} x=-238+\frac{213}{3}t \Rightarrow x=-238+71t \\ y=17-\frac{15}{3}t \Rightarrow y=17-5t \end{cases}, \quad t\in\mathbb{Z}$$

Άσκηση Βρείτε όλες τις λύσεις της διοφαντικής εξίσωσης
$\underbrace{77}_{a}x-\underbrace{707}_{b}y=\underbrace{91}_{\gamma}$

$707=9\cdot77+14$
$77=14+7$
$14=2\cdot7+0$ $\qquad d=\mu\kappa\delta(77,-707)=7$

$7/91=7\cdot13$ Άρα έχει λύση

$7=77-5\cdot14=77-5(707-9\cdot77)$
$=77-5\cdot707+45\cdot77$
$=46\cdot77-5\cdot707$

$77 \cdot 46 - 707 \cdot 5 = 7$

$77 \cdot \boxed{46 \cdot 13} - 707 \boxed{5 \cdot 13} = 91$

$x_0 = 46 \cdot 13 = 598$

$y_0 = 65$

$$\begin{cases} x = 598 + \frac{(-707)}{7} t \Rightarrow x = 598 - 101t \\ y = 65 - \frac{77}{7} t \Rightarrow y = 65 - 11t \end{cases}, t \in \mathbb{Z}$$

Αριθμητικές Πολλαπλασιαστικές Συναρτήσεις!

Ορισμός Μια συνάρτηση $F: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ ονομάζεται αριθμητική πολλαπλασιαστική συνάρτηση αν:

i) $F(1) = 1$

ii) Αν $\text{μκδ}(m,n) = 1$, τότε $F(mn) = F(m) \cdot F(n)$

Παραδείγματα ① Έστω $I(n) = n$

i) $I(1) = 1$

ii) Έστω $\text{μκδ}(m,n) = 1$, τότε $I(mn) = mn = I(m)\, I(n)$

② Έστω $v(n) = 1$, $\forall n$

i) $v(1) = 1$

ii) $\text{μκδ}(m,n) = 1 \Rightarrow v(mn) = 1 \Rightarrow 1 \cdot 1 = v(m) \cdot v(n)$

③ Έστω $\varepsilon(n) = \begin{cases} 1, \text{αν } n = 1 \\ 0, \text{αν } n > 1 \end{cases}$

i) $\varepsilon(1) = 1$

ii) $\text{μκδ}(m,n) = 1 \Rightarrow \varepsilon(mn) = \varepsilon(m) \cdot \varepsilon(n)$, ισχύει πάντα στα περιπτώσεις και αν πάρω (συνδυασμό) των m, n.

④ Έστω $T(n)$ μετράει το πλήθος των φυσικών διαιρετών του n.

i) $T(1)=1$

$T(p)=2$ όπου p: πρώτος

$T(p^2)=3$

$T(\underbrace{p_1^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_k^{a_k}}_{\text{πρωτογενής ανάλυση, άρα έχω διαφορετικούς πρώτους}})=(a_1+1)(a_2+1)\dots(a_k+1)$

$T(12)=T(3\cdot 2^2)=T(2^2 3^1)=(2+1)(1+1)=6$

$T(10)=T(2\cdot 5)=(1+1)(1+1)=4$

$T(120)=T(10\cdot 12)=T(2^3\cdot 3^1\cdot 5^1)=(3+1)(1+1)(1+1)=$

$=4\cdot 2\cdot 2=16$

$T(10\cdot 12)\neq T(10)\cdot T(12)$, δηλαδή η συνάρτηση δεν ξέρω αν είναι αριθμητική πολλαπλασιαστική διότι $\mu\kappa\delta(10,12)=2\neq 1$

Έστω $(m,n)=1$

1) $m=1$, τότε $T(mn)=1\cdot T(n)$

$T(m)T(n)=T(1)\cdot T(n)=1\cdot T(n)$, ισχύει

2) Όμοια αν $n=1$

3) Αν $m>1$ και $n>1$, $\mu\kappa\delta(m,n)=1$

$m=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_s^{a_s}$

$n=q_1^{b_1}q_2^{b_2}\dots q_t^{b_t}$ $\quad p_i\neq q_i$

$m\cdot n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_s^{a_s}q_1^{b_1}q_2^{b_2}\dots q_t^{b_t}$

$T(mn)=(a_1+1)(a_2+1)\dots(a_s+1)(b_1+1)(b_2+1)\dots(b_t+1)$

$T(m)T(n)=\underbrace{(a_1+1)(a_2+1)\dots(a_s+1)}_{T(m)}\underbrace{(b_1+1)(b_2+1)\dots(b_t+1)}_{T(n)}$

$T(mn)=T(m)T(n)$

Άρα η T είναι αριθμητική πολλαπλασιαστική συνάρτηση.

Η $\sigma(n)$ ισούται με το άθροισμα όλων των φυσικών διαιρετών του n.

$$T(n) = \sum_{d|n} 1$$

Παράδειγμα $\sigma(1)=1$

$\sigma(7) = 1+7=8$

$\sigma(p) = p+1$, όπου p: πρώτος

$\sigma(9) = 1+3+9 = 13$

$\sigma(12) = 1+2+3+4+6+12 = 28$

$n=1$, τότε $\sigma(1)=1$

$n>1$, τότε $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_s^{a_s}$

$$\sigma(n) = \sum_{\substack{d|n = p_1^{a_1}\cdots p_s^{a_s} \\ \text{πρωτογενής ανάλυση}}} d = \sum_{\substack{0\le b_1 \le a_1 \\ \vdots \\ 0 \le b_s \le a_s}} \underbrace{p_1^{b_1} p_2^{b_2} \cdots p_s^{b_s}}_{\text{όχι πρωτογενής ανάλυση}} =$$

$$= \underbrace{(1+p_1+p_1^2+\dots+p_1^{a_1})}_{\sigma(p_1^{a_1})} \underbrace{(1+p_2+p_2^2+\dots+p_2^{a_2})}_{\sigma(p_2^{a_2})} \cdots \underbrace{(1+p_s+p_s^2+\dots+p_s^{a_s})}_{\sigma(p_s^{a_s})} =$$

$$= \frac{p_1^{a_1+1}-1}{p_1-1} \cdot \frac{p_2^{a_2+1}-1}{p_2-1} \cdots \frac{p_s^{a_s+1}-1}{p_s-1}$$

ο παρονομαστής δεν μπορεί να είναι μηδέν γιατί $p_i \to$ πρώτοι

$$(a-1)(1+a+a^2+\dots+a^n) = a^{n+1}-1$$

Παράδειγμα Βρείτε το $\sigma(12)$

$\sigma(12) = \sigma(2^2 \cdot 3^1) = (1+2+2^2)(1+3) = 7\cdot 4 = 28$

$\sigma(12) = \sigma(2^2\cdot 3^2) = \frac{2^3-1}{2-1} \cdot \frac{3^2-1}{3-1} = \frac{7}{1} \cdot \frac{8}{2} = 4\cdot 7 = 28$

Η σ είναι αριθμητική πολλαπλασιαστική συνάρτηση.

Αν $(m,n)=1$, τότε $\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n)$

Παρατήρηση Έστω F αριθμητική πολλαπλασιαστική συνάρτηση και $n = \underbrace{p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_s^{a_s}}$

πρωτογενής ανάλυση

Τότε $F(p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_s^{a_s}) = F(p_1^{a_1}) F(p_2^{a_2}) \dots F(p_s^{a_s})$

$\text{μκδ}(p_1^{a_1}, p_2^{a_2} \dots p_s^{a_s}) = 1$

$F(p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_s^{a_s}) = F(p_1^{a_1}) F(\underbrace{p_2^{a_2} \dots p_s^{a_s}}) =$

$= F(p_1^{a_1}) F(p_2^{a_2}) F(p_3^{a_3} \dots p_s^{a_s}) = \dots =$

$= F(p_1^{a_1}) F(p_2^{a_2}) \dots F(p_s^{a_s})$

Εφαρμογή

Ορισμός Ο n λέγεται τέλειος αριθμός αν ισούται με το άθροισμα όλων των γνήσιων φυσικών διαιρετών του.

$6 = \underbrace{1+2+3}_{\text{γνήσιοι}} + \cancel{6}$ τέλειος

$28 = \underbrace{1+2+4+7+14}_{\text{γνήσιοι}} + \cancel{28}$

$\sigma(6) = 1+2+3+6 = 12$

Αθροίζω όλους τους διαιρέτες όχι μόνο τους γνήσιους

$\sigma(28) = 1+2+4+7+14+28 = 56$

Θεώρημα Ο n είναι τέλειος αν και μόνο αν $\sigma(n) = 2n$

Θεώρημα Αν ο 2^k-1 είναι πρώτος αριθμός, τότε ο $n=2^{k-1}(2^k-1)$ είναι τέλειος (Ευκλείδης, χρειάστηκε 2.000 για να αποδεχθεί).

Κάθε άρτιος τέλειος αριθμός είναι της μορφής $2^{k-1}(2^k-1)$ όπου 2^k-1 είναι πρώτος (Euler)

Απόδειξη $\sigma(n)=\sigma(2^{k-1}(2^k-1))=\sigma(2^{k-1}p)$, όπου $p=2^{k-1}$ πρώτος.

μκδ $(2^{k-1},p)=1$

$$\sigma(2^{k-1}p)=\sigma(2^{k-1})\sigma(p)=\frac{2^k-1}{2-1}(1+p)=\frac{(2^k-1)}{1}(\cancel{1}+2^k-\cancel{1})$$
$$=(2^k-1)2^k=2\cdot 2^{k-1}(2^k-1)=2n$$, άρα n τέλειος.